Calcul d'une intégrale

Dans ce problème α désigne un réel strictement supérieur à 1.

Notre objectif est de calculer : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

Partie I – Expression de l'intégrale comme limite d'une somme

1.a Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

On note $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

1.b Calculer $F(2)$.

2. Dans cette question on désire calculer $F(3)$.

2.a En exploitant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, établir : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}$.

2.b. En déduire que $2F(3) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}$.

2.c Achever le calcul de $F(3)$

On note $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ et $H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

3.a Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$.

3.b Justifier que $\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

3.c En déduire que $G(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

4.a En utilisant le changement de variable défini par la relation $u = t^{1-\alpha}$, montrer :
$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$.

4.b En déduire que $H(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k\alpha-1}$ puis que $F(\alpha) = 1 + 2 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2\alpha^2-1}$.

Partie II – Calcul de la limite de la somme proposée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,\pi]$, on note : $C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1.a Etablir : $\forall x \in]0,\pi], \frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

1.b Justifier l'existence de l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$ et en donner la valeur.

On note $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\cos\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \in]0,\pi] \end{cases}$.

2.a Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et calculer $\varphi'(0)$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \mathrm{d}x$.

2.b Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cos(nx) \mathrm{d}x$.

3.a Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} u_k = -\dfrac{\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)}{2} + \frac{1}{2} I_n + \frac{1}{2} J_n$.

3.b Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de α et de n.

4. Conclure finalement : $F(\alpha) = \dfrac{\dfrac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)}$.